SOSYAL AĞ ANALİZİNE GİRİŞ

Necmi Gürsakal [1]

[1] Fenerbahçe Üniversitesi

Sahibinden.com 12.11.2019

Plan

1. Ağ Bilimi ve Sosyal Ağlar
2. Temel Kavramlar
3. Ağ Türleri
4. Ağlarda Toplulukların Belirlenmesi
5. Merkezîlik Ölçüleri

▸ 150 years of Nature

▸ Mapping Analysis with bibliometrix R

▸ Steven Strogatz: How things in nature tend to sync up

Karmaşıklık Bilimi

- Belirli bir amaç için bir araya getirilen, bileşenleri bağımsız veya karşılıklı etkileşim içinde bulunan bir bütüne *sistem* adı verilir.
- Sistemler basit veya karmaşık yapıda olabilir.
- Karmaşıklık, çok sayıda parçaya sahip olan sistemlerin bir özelliğidir.
- Aynı şekilde çok sayıda bağlantısı ve canlı veya cansız birimlerin bulunduğu ağlar da karmaşık yapıdadır.
- Ağlardaki karmaşıklığın basitleştirilmesi, ağların görselleştirilmesi olan *çizgeler* yardımıyla olur.

Karmaşıklık Bilimi

- Belirli bir amaç için bir araya getirilen, bileşenleri bağımsız veya karşılıklı etkileşim içinde bulunan bir bütüne *sistem* adı verilir.
- Sistemler basit veya karmaşık yapıda olabilir.
- Karmaşıklık, çok sayıda parçaya sahip olan sistemlerin bir özelliğidir.
- Aynı şekilde çok sayıda bağlantısı ve canlı veya cansız birimlerin bulunduğu ağlar da karmaşık yapıdadır.
- Ağlardaki karmaşıklığın basitleştirilmesi, ağların görselleştirilmesi olan *çizgeler* yardımıyla olur.

Karmaşıklık Bilimi

- Belirli bir amaç için bir araya getirilen, bileşenleri bağımsız veya karşılıklı etkileşim içinde bulunan bir bütüne *sistem* adı verilir.
- Sistemler basit veya karmaşık yapıda olabilir.
- Karmaşıklık, çok sayıda parçaya sahip olan sistemlerin bir özelliğidir.
- Aynı şekilde çok sayıda bağlantısı ve canlı veya cansız birimlerin bulunduğu ağlar da karmaşık yapıdadır.
- Ağlardaki karmaşıklığın basitleştirilmesi, ağların görselleştirilmesi olan *çizgeler* yardımıyla olur.

Karmaşıklık Bilimi

- Belirli bir amaç için bir araya getirilen, bileşenleri bağımsız veya karşılıklı etkileşim içinde bulunan bir bütüne *sistem* adı verilir.
- Sistemler basit veya karmaşık yapıda olabilir.
- Karmaşıklık, çok sayıda parçaya sahip olan sistemlerin bir özelliğidir.
- Aynı şekilde çok sayıda bağlantısı ve canlı veya cansız birimlerin bulunduğu ağlar da karmaşık yapıdadır.
- Ağlardaki karmaşıklığın basitleştirilmesi, ağların görselleştirilmesi olan *çizgeler* yardımıyla olur.

Karmaşıklık Bilimi

- Belirli bir amaç için bir araya getirilen, bileşenleri bağımsız veya karşılıklı etkileşim içinde bulunan bir bütüne *sistem* adı verilir.
- Sistemler basit veya karmaşık yapıda olabilir.
- Karmaşıklık, çok sayıda parçaya sahip olan sistemlerin bir özelliğidir.
- Aynı şekilde çok sayıda bağlantısı ve canlı veya cansız birimlerin bulunduğu ağlar da karmaşık yapıdadır.
- Ağlardaki karmaşıklığın basitleştirilmesi, ağların görselleştirilmesi olan *çizgeler* yardımıyla olur.

Ağ Kavramı

- Ağ kabaca, canlı veya cansız bazı birimler ve bu birimler arasındaki bağlantılardan oluşur.
- Sözünü ettiğimiz bu birimlere ağlarda, düğüm (node, vertice) adı verilir.
- Düğümler insanlar olabileceği gibi, bilgisayarlar da ağ analizinde düğüm olabilir.
- Ağlarda gösterilen bağlantılarda (edges, ties) ise bilgi, para, haber, dedikodu ve mikroplar düğümlerden düğümlere aktarılabilir.
- Yine ağ gösteriminde -ki buna çizge (graph) adını veriyoruz- akrabalıklar, ortaklıklar gösterilebilir.

Ağ Kavramı

- Ağ kabaca, canlı veya cansız bazı birimler ve bu birimler arasındaki bağlantılardan oluşur.
- Sözünü ettiğimiz bu birimlere ağlarda, düğüm (node, vertice) adı verilir.
- Düğümler insanlar olabileceği gibi, bilgisayarlar da ağ analizinde düğüm olabilir.
- Ağlarda gösterilen bağlantılarda (edges, ties) ise bilgi, para, haber, dedikodu ve mikroplar düğümlerden düğümlere aktarılabilir.
- Yine ağ gösteriminde -ki buna çizge (graph) adını veriyoruz- akrabalıklar, ortaklıklar gösterilebilir.

Ağ Kavramı

- Ağ kabaca, canlı veya cansız bazı birimler ve bu birimler arasındaki bağlantılardan oluşur.
- Sözünü ettiğimiz bu birimlere ağlarda, düğüm (node, vertice) adı verilir.
- Düğümler insanlar olabileceği gibi, bilgisayarlar da ağ analizinde düğüm olabilir.
- Ağlarda gösterilen bağlantılarda (edges, ties) ise bilgi, para, haber, dedikodu ve mikroplar düğümlerden düğümlere aktarılabilir.
- Yine ağ gösteriminde -ki buna çizge (graph) adını veriyoruz- akrabalıklar, ortaklıklar gösterilebilir.

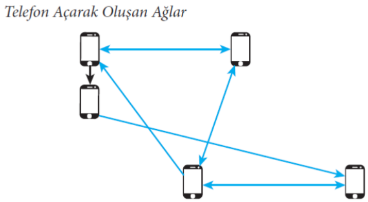
Ağ Kavramı

- Ağ kabaca, canlı veya cansız bazı birimler ve bu birimler arasındaki bağlantılardan oluşur.
- Sözünü ettiğimiz bu birimlere ağlarda, düğüm (node, vertice) adı verilir.
- Düğümler insanlar olabileceği gibi, bilgisayarlar da ağ analizinde düğüm olabilir.
- Ağlarda gösterilen bağlantılarda (edges, ties) ise bilgi, para, haber, dedikodu ve mikroplar düğümlerden düğümlere aktarılabilir.
- Yine ağ gösteriminde -ki buna çizge (graph) adını veriyoruz- akrabalıklar, ortaklıklar gösterilebilir.

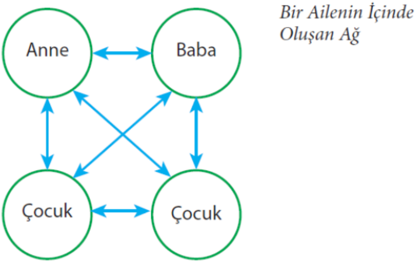
Ağ Kavramı

- Ağ kabaca, canlı veya cansız bazı birimler ve bu birimler arasındaki bağlantılardan oluşur.
- Sözünü ettiğimiz bu birimlere ağlarda, düğüm (node, vertice) adı verilir.
- Düğümler insanlar olabileceği gibi, bilgisayarlar da ağ analizinde düğüm olabilir.
- Ağlarda gösterilen bağlantılarda (edges, ties) ise bilgi, para, haber, dedikodu ve mikroplar düğümlerden düğümlere aktarılabilir.
- Yine ağ gösteriminde -ki buna çizge (graph) adını veriyoruz- akrabalıklar, ortaklıklar gösterilebilir.

Ağ Kavramı



(a) Telefon Açarak Oluşan Ağlar



(b) Bir Aile İçinde Oluşan Ağ

Çizge Kuramı

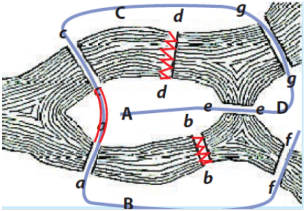


Figure: Königsberg Köprüleri

Euler 1735 yılında Königsberg'te (bugün Rusya'da Kaliningrad) bulunan iki ada ve yedi köprü ile ilgili şu soruyu sordu: Başlanan yere dönülmesi kaydıyla yedi köprüden sadece birer defa geçen bir yol var mıydı? Eulere göre böyle bir yol yoktu ve bu teorem çizge kuramının ilk kuramıydı.

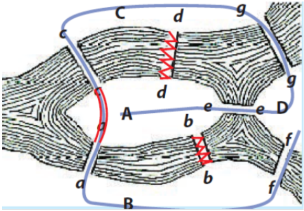


Figure: Königsberg Köprüleri

Ağlardaki düğümlerin D ve bağlantıların B şeklinde temsili bir gösterimine *çizge* adını veriyoruz. Bir çizge D ve B gibi iki kümeden oluşur ve çizgeyi $Ç = (D, B)$ şeklinde gösterebiliriz:

- Elemanları D'ler olan düğümler (vertices) kümesi
- Elemanları B'ler olan bağlantılar (edges) kümesi

Çizge kuramı son 50 yılda matematiğin en hızlı gelişen dalıdır. Aslında ağlar karmaşık, ağların gösterimi ve soyutlamaları olan çizgeler ise basittir.

Ağ Bilimi

- 1950'li yıllarda ünlü Macar matematikçiler, Paul Erdos ve Alfred Rényi "rassal ağ" kavramını ortaya atarak önemli bir sıçrama yarattılar. Paul Erdos, diğer matematikçilerin kapılarını çalarak, iş birliği yapmaya hazır olduğunu belirtmek için "Beynim açık" demesi ile tanınırdı.
- "Zayıf Bagların Gücü" adlı makalesi ile Mark S. Granovetter başka önemli bir gelişmeye yol açtı. 1969 yılında American Journal of Society dergisine gönderdiği ve yayımlanmayarak reddedilen bu makale, sonunda1973 yılında yayımlandı.

Ağ Bilimi

- 1950'li yıllarda ünlü Macar matematikçiler, Paul Erdos ve Alfred Rényi "rassal ağ" kavramını ortaya atarak önemli bir sıçrama yarattılar. Paul Erdos, diğer matematikçilerin kapılarını çalarak, iş birliği yapmaya hazır olduğunu belirtmek için "Beynim açık" demesi ile tanınırdı.
- "Zayıf Bagların Gücü" adlı makalesi ile Mark S. Granovetter başka önemli bir gelişmeye yol açtı. 1969 yılında American Journal of Society dergisine gönderdiği ve yayımlanmayarak reddedilen bu makale, sonunda1973 yılında yayımlandı.

Yönlü ve Yönsüz Ağlar

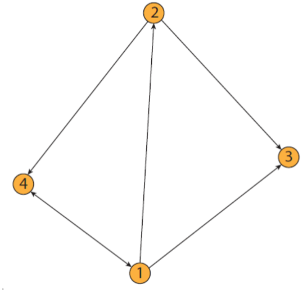


Figure: Yönlü Ağ

- Yönlü ağlarda bağlantıların yönü vardır. Şekilde dört düğümlü yönlü bir çizge görülmektedir.

Yönlü ve Yönsüz Ağlar

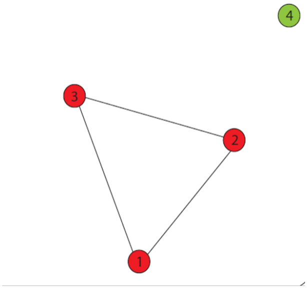


Figure: Yönsüz Ağ

- Yönsüz ağlarda bağlantıların yönü yoktur. Şekilde üç düğümlü yönsüz bir ağ görülmektedir.

Tartılı ve Tartısız Ağlar

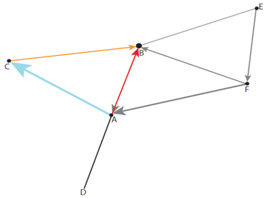


Figure: Bağlantıların gücü farklı, yönlü bir çizge

- Tartılı ve tartısız ağlar, yönlü veya yönsüz olabilirler.
- Eğer bir ağdaki bütün düğümler arasındaki bağlantıların değeri 1 e eşitse bu ağ tartısız bir ağdır.
- Diğer yandan, eğer düğümler arasındaki bağlantıların değerleri farklı sayılar olabiliyorsa bu ağlar ise tartılı ağlardır.

Üçlü Bağlantılar

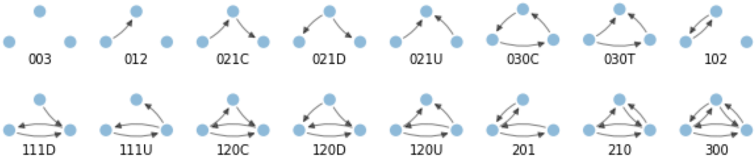


Figure: Üçlü Bağlantılar Listesi

Üçlü Kapanma

- Üçlü kapanma: A kişisinin henüz birbirini tanımayan, B ve C gibi iki arkadaşı olsun.
- Zaman içinde B ile C'nin arkadaş olma olasılıkları yüksektir ve bu durum "üçlü kapanma" olarak adlandırılır.

Dengeli ve Dengesiz Üçlüler

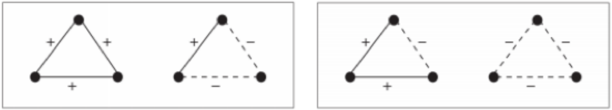


Figure: Dengeli ve dengesiz üçlüler

- iki düğüm arasındaki + işareti arkadaşlığı, - işareti ise düşmanlığı gösterdiğinde bu ağlar işaretli sosyal ağlar olarak adlandırılır.
- Soldaki gibi üç arkadaşlık ilişkisinden veya bir arkadaşlık ilişkisi ile iki düşmanlık bağından oluşan üçlüler dengeli; ikisi arkadaşlık, biri düşmanlık bağından veya üçü de düşmanlık bağından oluşan üçlüler ise dengesiz üçlüler olarak adlandırılır.

Dengeli ve Dengesiz Üçlüler

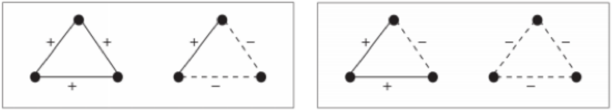


Figure: Dengeli ve dengesiz üçlüler

- iki düğüm arasındaki + işareti arkadaşlığı, - işareti ise düşmanlığı gösterdiğinde bu ağlar işaretli sosyal ağlar olarak adlandırılır.
- Soldaki gibi üç arkadaşlık ilişkisinden veya bir arkadaşlık ilişkisi ile iki düşmanlık bağından oluşan üçlüler dengeli; ikisi arkadaşlık, biri düşmanlık bağından veya üçü de düşmanlık bağından oluşan üçlüler ise dengesiz üçlüler olarak adlandırılır.

Dengeli ve Dengesiz Üçlüler

- Dengeli üçlüler bize, “arkadaşımın arkadaşı benim de arkadaşımdır” veya “düşmanımın arkadaşı benim de düşmanımdır”ı anlatır.
- Buna karşılık, dengesiz üçlüler ise, dengelilere göre gerilim kaynağıdır.
- Örneğin, bir A kişisinin B ve C gibi iki arkadaşının olması ancak B ile C’nin geçinememesi zaman içinde bu üçlüyü bozabilir veya üç bireyin de düşmanlık içinde olması yine bu üçlüyü bozacaktır.

Dengeli ve Dengesiz Üçlüler

- Dengeli üçlüler bize, “arkadaşımın arkadaşı benim de arkadaşımdır” veya “düşmanımın arkadaşı benim de düşmanımdır”ı anlatır.
- Buna karşılık, dengesiz üçlüler ise, dengelilere göre gerilim kaynağıdır.
- Örneğin, bir A kişisinin B ve C gibi iki arkadaşının olması ancak B ile C’nin geçinememesi zaman içinde bu üçlüyü bozabilir veya üç bireyin de düşmanlık içinde olması yine bu üçlüyü bozacaktır.

Dengeli ve Dengesiz Üçlüler

- Dengeli üçlüler bize, “arkadaşımın arkadaşı benim de arkadaşımdır” veya “düşmanımın arkadaşı benim de düşmanımdır”ı anlatır.
- Buna karşılık, dengesiz üçlüler ise, dengelilere göre gerilim kaynağıdır.
- Örneğin, bir A kişisinin B ve C gibi iki arkadaşının olması ancak B ile C’nin geçinememesi zaman içinde bu üçlüyü bozabilir veya üç bireyin de düşmanlık içinde olması yine bu üçlüyü bozacaktır.

Komşuluk Matrisi

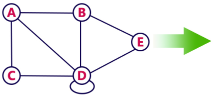
Komşuluk matrisini bir A_{ij} matrisi şeklinde düşünürsek ve bu matrisin bağlantılarının değeri 1 ise, bu matrisin elemanları şu şekilde olur:

- Eğer i'den j'ye bir bağlantı varsa $A_{ij} = 1$
- Eğer i'den j'ye bir bağlantı yoksa $A_{ij} = 0$ olur.

Eğer komşuluk matrisi yönsüz bir ağın komşuluk matrisiyse:

- Matris simetriktir ve $A_{ij} = 0$'dır.

Komşuluk Matrisi

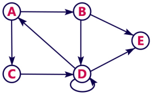


$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Figure: Yönsüz bir ağ için komşuluk matrisi

- Komşuluk matrisi, çizgeleri temsil etmenin bir diğer yoludur.
- Matristeki 1 değeri, o hücreye denk gelen satır ve sütun arasında bağlantının olduğunu,
- 0 değeri ise herhangi bir bağlantının olmadığını gösterir.

Komşuluk Matrisi



$$
\begin{array}{c|ccccc|}
 & A & B & C & D & E \\
\hline
A & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
B & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
C & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
D & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

Figure: Yönlü bir ağ için komşuluk matrisi

- Komşuluk matrisinde yönlü ve yönsüz ağlar arasındaki fark, matrisin simetrik olup olmamasıdır.
- Yönsüz ağlarda komşuluk matrisinin simetrik olması zorunluyken, yönlü matriste böyle bir koşul aranmaz.

Ağ Yoğunluğu

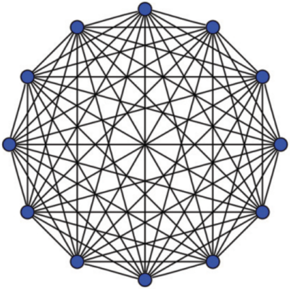


Figure: Tam ağ

- Gerçek ağların düğüm N ve bağlantı sayıları L birbirinden çok farklıdır. Bir ağdaki bağlantı sayısı, $L = 0$ ile L_{max} arasında değişir.

Ağ Yoğunluğu

Tam bir çizgede, maksimum bağlantı sayısını gösteren L_{max} sayıda bağlantı bulunur. L_{max}, aşağıdaki formülle hesaplanır.

Maksimum Bağlantı Sayısı

$L_{max} = \frac{N(N-1)}{2}$

Patika, En Kısa Patika ve Ortalama Patika Uzunluğu

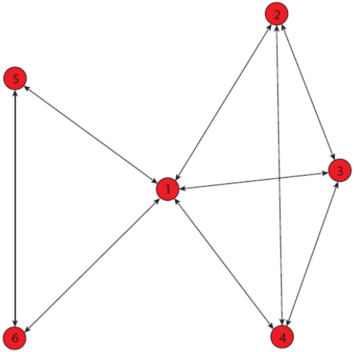


Figure: Yoğunluğu 0.6 olan bir ağ

- Bir ağda iki düğüm arasındaki bağlantıların birbirine eklenmesinden oluşan yol *patika* adını alır.
- 5 nolu düğümden 6 nolu düğüme veya 6 nolu düğümden 5 nolu düğüme tek bir patika söz konusudur.

Patika, En Kısa Patika Ve Ortalama Patika Uzunluğu

- Bir düğümden bir diğerine gitmek istediğimizde, bu iki düğüm arasındaki muhtemel bağlantılardan en kısa olanı *en kısa patika* adını alır.
- i ve j gibi iki düğüm arasındaki en kısa patika d_{ij} ile gösterilmektedir.
- Yönsüz ağlarda $d_{ij} = d_{ji}$ olmakla birlikte yönlü ağlarda $d_{ij} \neq d_{ji}$ söz konusudur.
- Yönlü ağlarda i'den j'ye bir patika olması j'den i'ye de bir patika olmasını garantilemez.
- *Ortalama patika uzunluğu* ise, bütün düğüm çitlerini arasındaki en kısa patikaların ortalaması olarak tanımlanır.

Ortalama Patika Uzunluğu

$$\ell = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i \neq j} d_{ij}$$

Rassal Ağlar

- Rassal ağ düşüncesi, Paul Erdős ile Alfréd Rényi'ye dayanır.
- Erdős-Rényi rassal ağ modelinde (Erdős ve Rényi, 1959) iki düğümün birbirleri ile bağlantılı olmaları, sabit bir olasılıkla gerçekleşir.
- Eğer sabit bir olasılıkla rassal bir şekilde düğüm çiftleri arasında bağlantılar oluşturulursa, sonuçta elde edilen ağ bir *rassal ağ* olur.
- Bir anlamda istatistikteki normal dağılıma benzeyen rassal ağ modeli, sosyal ağ analizinde bir referans noktası önemine sahiptir.
- Analizlerde rassal ağ, istatistikteki normal dağılım gibi ağların türlerini belirlemek ve ağların rassal ağdan ne ölçüde saptıklarını görebilmek için belirli bir dayanak noktası oluşturur.

Rassal Ağlar

- Rassal ağ düşüncesi, Paul Erdős ile Alfréd Rényi'ye dayanır.
- Erdős-Rényi rassal ağ modelinde (Erdős ve Rényi, 1959) iki düğümün birbirleri ile bağlantılı olmaları, sabit bir olasılıkla gerçekleşir.
- Eğer sabit bir olasılıkla rassal bir şekilde düğüm çiftleri arasında bağlantılar oluşturulursa, sonuçta elde edilen ağ bir *rassal ağ* olur.
- Bir anlamda istatistikteki normal dağılıma benzeyen rassal ağ modeli, sosyal ağ analizinde bir referans noktası önemine sahiptir.
- Analizlerde rassal ağ, istatistikteki normal dağılım gibi ağların türlerini belirlemek ve ağların rassal ağdan ne ölçüde saptıklarını görebilmek için belirli bir dayanak noktası oluşturur.

Rassal Ağlar

- Rassal ağ düşüncesi, Paul Erdős ile Alfréd Rényi'ye dayanır.
- Erdős-Rényi rassal ağ modelinde (Erdős ve Rényi, 1959) iki düğümün birbirleri ile bağlantılı olmaları, sabit bir olasılıkla gerçekleşir.
- Eğer sabit bir olasılıkla rassal bir şekilde düğüm çiftleri arasında bağlantılar oluşturulursa, sonuçta elde edilen ağ bir *rassal ağ* olur.
- Bir anlamda istatistikteki normal dağılıma benzeyen rassal ağ modeli, sosyal ağ analizinde bir referans noktası önemine sahiptir.
- Analizlerde rassal ağ, istatistikteki normal dağılım gibi ağların türlerini belirlemek ve ağların rassal ağdan ne ölçüde saptıklarını görebilmek için belirli bir dayanak noktası oluşturur.

Rassal Ağlar

- Rassal ağ düşüncesi, Paul Erdős ile Alfréd Rényi'ye dayanır.
- Erdős-Rényi rassal ağ modelinde (Erdős ve Rényi, 1959) iki düğümün birbirleri ile bağlantılı olmaları, sabit bir olasılıkla gerçekleşir.
- Eğer sabit bir olasılıkla rassal bir şekilde düğüm çiftleri arasında bağlantılar oluşturulursa, sonuçta elde edilen ağ bir *rassal ağ* olur.
- Bir anlamda istatistikteki normal dağılıma benzeyen rassal ağ modeli, sosyal ağ analizinde bir referans noktası önemine sahiptir.
- Analizlerde rassal ağ, istatistikteki normal dağılım gibi ağların türlerini belirlemek ve ağların rassal ağdan ne ölçüde saptıklarını görebilmek için belirli bir dayanak noktası oluşturur.

Rassal Ağlar

- Rassal ağ düşüncesi, Paul Erdős ile Alfréd Rényi'ye dayanır.
- Erdős-Rényi rassal ağ modelinde (Erdős ve Rényi, 1959) iki düğümün birbirleri ile bağlantılı olmaları, sabit bir olasılıkla gerçekleşir.
- Eğer sabit bir olasılıkla rassal bir şekilde düğüm çiftleri arasında bağlantılar oluşturulursa, sonuçta elde edilen ağ bir *rassal ağ* olur.
- Bir anlamda istatistikteki normal dağılıma benzeyen rassal ağ modeli, sosyal ağ analizinde bir referans noktası önemine sahiptir.
- Analizlerde rassal ağ, istatistikteki normal dağılım gibi ağların türlerini belirlemek ve ağların rassal ağdan ne ölçüde saptıklarını görebilmek için belirli bir dayanak noktası oluşturur.

Ağların Derece Dağılımı

- Bir çizgede N düğüm varsa ve her bir düğüm ortalama k bağlantıya sahipse, her bir bağlantının gerçekleşme olasılıkları birbirinden bağımsız ve p ise $p = \dfrac{k}{(N-1)}$ olur ve N büyüdüğünde bu değer yaklaşık olarak $\dfrac{k}{N}$ değerine eşit olur.

Belirli bir düğümün sahip olduğu bağlantı sayısı olan k'nın dağılımı **derece dağılımı** adını alır. Olasılık dağılımı olan P_k, şu şekilde hesaplanabilir:

Binomial Form

$$P_k = \binom{N-1}{k} p^k (1-p)^{N-1-k}$$

Poisson Form

$$P_k = e^{-\langle k \rangle} \frac{\langle k \rangle^k}{k!}$$

Büyük N ve küçük p değerleri için Binom derece dağılımı fonksiyonu, Poisson derece dağılım fonksiyonuna yaklaşacaktır.

Jeodezik Uzaklık ve Yarıçap

- Ağda iki kişinin birbirlerine ne kadar uzaklıkta oldukları sorusu akla sık gelen bir sorudur ve bu çerçevede "patika" kavramı ağ çalışmaları için çok önemli bir kavramdır.
- Patikayı "bir düğümle başlayıp bir düğümle biten bir bağlantı dizisi" olarak tanımlayabiliriz.
- İki kişi arasındaki en kısa patika, *jeodezik uzaklık (geodesic distance)* adını alır.
- *Yarıçap (diameter)* ise, bağlantılı bir ağda en büyük jeodezik uzaklıktır.

Jeodezik Uzaklık ve Yarıçap

- Ağda iki kişinin birbirlerine ne kadar uzaklıkta oldukları sorusu akla sık gelen bir sorudur ve bu çerçevede "patika" kavramı ağ çalışmaları için çok önemli bir kavramdır.
- Patikayı "bir düğümle başlayıp bir düğümle biten bir bağlantı dizisi" olarak tanımlayabiliriz.
- İki kişi arasındaki en kısa patika, *jeodezik uzaklık (geodesic distance)* adını alır.
- *Yarıçap (diameter)* ise, bağlantılı bir ağda en büyük jeodezik uzaklıktır.

Jeodezik Uzaklık ve Yarıçap

- Ağda iki kişinin birbirlerine ne kadar uzaklıkta oldukları sorusu akla sık gelen bir sorudur ve bu çerçevede "patika" kavramı ağ çalışmaları için çok önemli bir kavramdır.
- Patikayı "bir düğümle başlayıp bir düğümle biten bir bağlantı dizisi" olarak tanımlayabiliriz.
- İki kişi arasındaki en kısa patika, *jeodezik uzaklık (geodesic distance)* adını alır.
- *Yarıçap (diameter)* ise, bağlantılı bir ağda en büyük jeodezik uzaklıktır.

Jeodezik Uzaklık ve Yarıçap

- Ağda iki kişinin birbirlerine ne kadar uzaklıkta oldukları sorusu akla sık gelen bir sorudur ve bu çerçevede "patika" kavramı ağ çalışmaları için çok önemli bir kavramdır.
- Patikayı "bir düğümle başlayıp bir düğümle biten bir bağlantı dizisi" olarak tanımlayabiliriz.
- İki kişi arasındaki en kısa patika, *jeodezik uzaklık (geodesic distance)* adını alır.
- *Yarıçap (diameter)* ise, bağlantılı bir ağda en büyük jeodezik uzaklıktır.

Jeodezik Uzaklık ve Yarıçap

Ortalama patika uzunluğu N düğümden oluşan yönlü bir ağda, d_{ij} bize i ve j düğümleri arasındaki ortalama uzaklığı gösterdiğinde şu şekilde hesaplanabilir:

$$\langle d \rangle = \frac{1}{n \cdot (n-1)} \cdot \sum_{i \neq j} d_{ij}$$

Kümelenme Katsayısı

- Kümelenme katsayısı düğüm bazında, bireysel olarak veya ağın genelinde, global olarak hesaplanabilir.
- Kümelenme katsayısını (clustering coefficient) şöyle açıklayabiliriz: Eğer bir sosyal ağda arkadaşlarınız da birbirleri ile arkadaşlarsa, birbirlerini tanıyorlarsa, kümelenme katsayınız yüksektir.
- Eğer arkadaşlarınız birbirini tanımıyorsa, o zaman da kümelenme katsayınız düşüktür.
- Kümelenme katsayısı arkadaşlarımızın birbirleri ile ne kadar arkadaş olduklarını ölçer.
- Bir yönsüz ağın kümelenme katsayısı, ağdaki üçgen sayısıdır.
- Bir ağın genel kümelenme katsayısı, her düğümün *yerel kümelenme katsayısına* dayanır.

Kümelenme Katsayısı

- Kümelenme katsayısı düğüm bazında, bireysel olarak veya ağın genelinde, global olarak hesaplanabilir.
- Kümelenme katsayısını (clustering coefficient) şöyle açıklayabiliriz: Eğer bir sosyal ağda arkadaşlarınız da birbirleri ile arkadaşlarsa, birbirlerini tanıyorlarsa, kümelenme katsayınız yüksektir.
- Eğer arkadaşlarınız birbirini tanımıyorsa, o zaman da kümelenme katsayınız düşüktür.
- Kümelenme katsayısı arkadaşlarımızın birbirleri ile ne kadar arkadaş olduklarını ölçer.
- Bir yönsüz ağın kümelenme katsayısı, ağdaki üçgen sayısıdır.
- Bir ağın genel kümelenme katsayısı, her düğümün *yerel kümelenme katsayısına* dayanır.

Kümelenme Katsayısı

- Kümelenme katsayısı düğüm bazında, bireysel olarak veya ağın genelinde, global olarak hesaplanabilir.
- Kümelenme katsayısını (clustering coefficient) şöyle açıklayabiliriz: Eğer bir sosyal ağda arkadaşlarınız da birbirleri ile arkadaşlarsa, birbirlerini tanıyorlarsa, kümelenme katsayınız yüksektir.
- Eğer arkadaşlarınız birbirini tanımıyorsa, o zaman da kümelenme katsayınız düşüktür.
- Kümelenme katsayısı arkadaşlarımızın birbirleri ile ne kadar arkadaş olduklarını ölçer.
- Bir yönsüz ağın kümelenme katsayısı, ağdaki üçgen sayısıdır.
- Bir ağın genel kümelenme katsayısı, her düğümün *yerel kümelenme katsayısına* dayanır.

Kümelenme Katsayısı

- Kümelenme katsayısı düğüm bazında, bireysel olarak veya ağın genelinde, global olarak hesaplanabilir.
- Kümelenme katsayısını (clustering coefficient) şöyle açıklayabiliriz: Eğer bir sosyal ağda arkadaşlarınız da birbirleri ile arkadaşlarsa, birbirlerini tanıyorlarsa, kümelenme katsayınız yüksektir.
- Eğer arkadaşlarınız birbirini tanımıyorsa, o zaman da kümelenme katsayınız düşüktür.
- Kümelenme katsayısı arkadaşlarımızın birbirleri ile ne kadar arkadaş olduklarını ölçer.
- Bir yönsüz ağın kümelenme katsayısı, ağdaki üçgen sayısıdır.
- Bir ağın genel kümelenme katsayısı, her düğümün *yerel kümelenme katsayısına* dayanır.

Kümelenme Katsayısı

- Kümelenme katsayısı düğüm bazında, bireysel olarak veya ağın genelinde, global olarak hesaplanabilir.
- Kümelenme katsayısını (clustering coefficient) şöyle açıklayabiliriz: Eğer bir sosyal ağda arkadaşlarınız da birbirleri ile arkadaşlarsa, birbirlerini tanıyorlarsa, kümelenme katsayınız yüksektir.
- Eğer arkadaşlarınız birbirini tanımıyorsa, o zaman da kümelenme katsayınız düşüktür.
- Kümelenme katsayısı arkadaşlarımızın birbirleri ile ne kadar arkadaş olduklarını ölçer.
- Bir yönsüz ağın kümelenme katsayısı, ağdaki üçgen sayısıdır.
- Bir ağın genel kümelenme katsayısı, her düğümün *yerel kümelenme katsayısına* dayanır.

Kümelenme Katsayısı

- Kümelenme katsayısı düğüm bazında, bireysel olarak veya ağın genelinde, global olarak hesaplanabilir.
- Kümelenme katsayısını (clustering coefficient) şöyle açıklayabiliriz: Eğer bir sosyal ağda arkadaşlarınız da birbirleri ile arkadaşlarsa, birbirlerini tanıyorlarsa, kümelenme katsayınız yüksektir.
- Eğer arkadaşlarınız birbirini tanımıyorsa, o zaman da kümelenme katsayınız düşüktür.
- Kümelenme katsayısı arkadaşlarımızın birbirleri ile ne kadar arkadaş olduklarını ölçer.
- Bir yönsüz ağın kümelenme katsayısı, ağdaki üçgen sayısıdır.
- Bir ağın genel kümelenme katsayısı, her düğümün *yerel kümelenme katsayısına* dayanır.

Kümelenme Katsayısı

Bir yerel kümelenme katsayısı, bir düğümün komşularının ne derecede birbirleri ile bağlantı içinde olduğunu gösterir. Örneğin k_i derecesine sahip bir i düğümünün yerel kümelenme katsayısı şu şekilde hesaplanır:

Yerel Kümelenme Katsayısı

$$C_i = \frac{2L_i}{k_i(k_i - 1)}$$

Burada L_i, i düğümünün k_i komşusu arasındaki bağlantı sayısını gösterir. $C_i = 0$ bize, i düğümünün komşuları arasında hiçbir bağlantının olmadığını; $C_i = 1$ ise düğümün komşularının tümüyle bağlantılı olduğunu gösterir.

Kümelenme Katsayısı

Ortalama kümelenme katsayısı $\langle C \rangle$ ise bize $i = 1 \ldots N$'ye kadar olan tüm düğümler için hesaplanan kümelenme katsayılarının ortalamasını gösterir.

Ortalama Kümelenme Katsayısı

$$\langle C \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} C_{\mathrm{i}}$$

Bu katsayının yorumu: Rassal olarak seçilen iki düğümün bağlantı içinde olma olasılığı olarak yapılabilir.

Altı Adım Hipotezi

- 1967 yılında Steve Milgram 60 mektup yollayarak bir deney gerçekleştirmiştir.
- Deneye katılanlardan mektubu arkadaşlarının arkadaşlarına ulaştırarak Massachusetts' deki istenilen kişiye göndermelerini istemiştir.
- Deneyin sonunda Milgram mektubun ortalama altı adımda istenilen yere ulaştığını belirledi.
- Sonraları bu olgu sosyolojide ve ağ kuramında "altı adım hipotezi" olarak yer aldı.
- 2011 yılında Facebook'da yapılan çalışmada birbirini hiç tanımayan iki kişi arasındaki uzaklık ortalama dört adıma düşmüştür.

Altı Adım Hipotezi

- 1967 yılında Steve Milgram 60 mektup yollayarak bir deney gerçekleştirmiştir.
- Deneye katılanlardan mektubu arkadaşlarının arkadaşlarına ulaştırarak Massachusetts' deki istenilen kişiye göndermelerini istemiştir.
- Deneyin sonunda Milgram mektubun ortalama altı adımda istenilen yere ulaştığını belirledi.
- Sonraları bu olgu sosyolojide ve ağ kuramında "altı adım hipotezi" olarak yer aldı.
- 2011 yılında Facebook'da yapılan çalışmada birbirini hiç tanımayan iki kişi arasındaki uzaklık ortalama dört adıma düşmüştür.

Altı Adım Hipotezi

- 1967 yılında Steve Milgram 60 mektup yollayarak bir deney gerçekleştirmiştir.
- Deneye katılanlardan mektubu arkadaşlarının arkadaşlarına ulaştırarak Massachusetts' deki istenilen kişiye göndermelerini istemiştir.
- Deneyin sonunda Milgram mektubun ortalama altı adımda istenilen yere ulaştığını belirledi.
- Sonraları bu olgu sosyolojide ve ağ kuramında "altı adım hipotezi" olarak yer aldı.
- 2011 yılında Facebook'da yapılan çalışmada birbirini hiç tanımayan iki kişi arasındaki uzaklık ortalama dört adıma düşmüştür.

Altı Adım Hipotezi

- 1967 yılında Steve Milgram 60 mektup yollayarak bir deney gerçekleştirmiştir.
- Deneye katılanlardan mektubu arkadaşlarının arkadaşlarına ulaştırarak Massachusetts' deki istenilen kişiye göndermelerini istemiştir.
- Deneyin sonunda Milgram mektubun ortalama altı adımda istenilen yere ulaştığını belirledi.
- Sonraları bu olgu sosyolojide ve ağ kuramında "altı adım hipotezi" olarak yer aldı.
- 2011 yılında Facebook'da yapılan çalışmada birbirini hiç tanımayan iki kişi arasındaki uzaklık ortalama dört adıma düşmüştür.

Altı Adım Hipotezi

- 1967 yılında Steve Milgram 60 mektup yollayarak bir deney gerçekleştirmiştir.
- Deneye katılanlardan mektubu arkadaşlarının arkadaşlarına ulaştırarak Massachusetts' deki istenilen kişiye göndermelerini istemiştir.
- Deneyin sonunda Milgram mektubun ortalama altı adımda istenilen yere ulaştığını belirledi.
- Sonraları bu olgu sosyolojide ve ağ kuramında "altı adım hipotezi" olarak yer aldı.
- 2011 yılında Facebook'da yapılan çalışmada birbirini hiç tanımayan iki kişi arasındaki uzaklık ortalama dört adıma düşmüştür.

Küçük Dünya Ağları

- Watts–Strogatz modeli diye de anılan küçük dünya ağları modeli küçük dünya özelliklerine sahip rassal ağ üretme modelidir.
- Bu tür çizgelerin, kısa ortalama patika uzunluklarına ve yüksek kümelenme katsayılarına sahip oldukları belirlenmiştir.
- Bir ağın küçük dünya ağı olup olmadığını anlamak için o ağın ortalama patika uzunluğu ile aynı büyüklükteki rassal ağların ortalama patika uzunlukları ve ağların kümelenme katsayıları karşılaştırılır.
- Küçük dünya ağları; kısa global patika uzunlukları ve yüksek yerel kümelenme katsayıları ile özetlenir.

Küçük Dünya Ağları

- Watts–Strogatz modeli diye de anılan küçük dünya ağları modeli küçük dünya özelliklerine sahip rassal ağ üretme modelidir.
- Bu tür çizgelerin, kısa ortalama patika uzunluklarına ve yüksek kümelenme katsayılarına sahip oldukları belirlenmiştir.
- Bir ağın küçük dünya ağı olup olmadığını anlamak için o ağın ortalama patika uzunluğu ile aynı büyüklükteki rassal ağların ortalama patika uzunlukları ve ağların kümelenme katsayıları karşılaştırılır.
- Küçük dünya ağları; kısa global patika uzunlukları ve yüksek yerel kümelenme katsayıları ile özetlenir.

Küçük Dünya Ağları

- Watts–Strogatz modeli diye de anılan küçük dünya ağları modeli küçük dünya özelliklerine sahip rassal ağ üretme modelidir.
- Bu tür çizgelerin, kısa ortalama patika uzunluklarına ve yüksek kümelenme katsayılarına sahip oldukları belirlenmiştir.
- Bir ağın küçük dünya ağı olup olmadığını anlamak için o ağın ortalama patika uzunluğu ile aynı büyüklükteki rassal ağların ortalama patika uzunlukları ve ağların kümelenme katsayıları karşılaştırılır.
- Küçük dünya ağları; kısa global patika uzunlukları ve yüksek yerel kümelenme katsayıları ile özetlenir.

Küçük Dünya Ağları

- Watts–Strogatz modeli diye de anılan küçük dünya ağları modeli küçük dünya özelliklerine sahip rassal ağ üretme modelidir.
- Bu tür çizgelerin, kısa ortalama patika uzunluklarına ve yüksek kümelenme katsayılarına sahip oldukları belirlenmiştir.
- Bir ağın küçük dünya ağı olup olmadığını anlamak için o ağın ortalama patika uzunluğu ile aynı büyüklükteki rassal ağların ortalama patika uzunlukları ve ağların kümelenme katsayıları karşılaştırılır.
- Küçük dünya ağları; kısa global patika uzunlukları ve yüksek yerel kümelenme katsayıları ile özetlenir.

Ölçekten Bağımsızlık

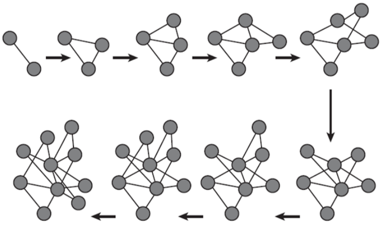


Figure: Tercihli Bağlantı Nedeniyle Ölçekten Bağımsız Ağın Belirmesi

- Barabási ve Albert tarafından geliştirilen bu model, tercihli bağlantı (preferential attachment) olarak da bilinmektedir. Bu modelde ağa yeni eklenen düğümler, ağda derecesi yüksek olan düğümlerle bağlantı kurmaktadır.
- Rassal ağlardan farkı: Düğümler arası bağlantılar rassal olarak değil, genelde bağlantıların derecesi yüksek olan düğümlerle yapılmasıdır.

Ölçekten Bağımsızlık

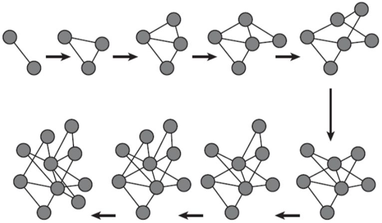


Figure: Tercihli Bağlantı Nedeniyle Ölçekten Bağımsız Ağın Belirmesi

- Barabási ve Albert tarafından geliştirilen bu model, tercihli bağlantı (preferential attachment) olarak da bilinmektedir. Bu modelde ağa yeni eklenen düğümler, ağda derecesi yüksek olan düğümlerle bağlantı kurmaktadır.
- Rassal ağlardan farkı: Düğümler arası bağlantılar rassal olarak değil, genelde bağlantıların derecesi yüksek olan düğümlerle yapılmasıdır.

Ölçekten Bağımsızlık

- Bu modelde ağ oluşumu, zaman içerisinde ağa yeni düğümler eklenmesi şeklinde gerçekleşir.
- Bu Eklenen yeni düğümler, ağdaki derecesi yüksek olan düğümlere bağlanmak ister.
- Bu nedenle bu model zengin daha zengin olur (rich gets richer) olarak da anılır.
- Ölçekten bağımsız ağ öodelinin rassal ağ modelinden farkı, ağa her adımda yeni bir düğüm eklenmesidir.
- Ağa eklenen düğüm,i düğümünün derecesi olan k_i'ye bağımlı olarak i düğümü ile bağlantı kurar.

Ölçekten Bağımsızlık

- Bu modelde ağ oluşumu, zaman içerisinde ağa yeni düğümler eklenmesi şeklinde gerçekleşir.
- Bu Eklenen yeni düğümler, ağdaki derecesi yüksek olan düğümlere bağlanmak ister.
- Bu nedenle bu model zengin daha zengin olur (rich gets richer) olarak da anılır.
- Ölçekten bağımsız ağ öodelinin rassal ağ modelinden farkı, ağa her adımda yeni bir düğüm eklenmesidir.
- Ağa eklenen düğüm,i düğümünün derecesi olan k_i'ye bağımlı olarak i düğümü ile bağlantı kurar.

Ölçekten Bağımsızlık

- Bu modelde ağ oluşumu, zaman içerisinde ağa yeni düğümler eklenmesi şeklinde gerçekleşir.
- Bu Eklenen yeni düğümler, ağdaki derecesi yüksek olan düğümlere bağlanmak ister.
- Bu nedenle bu model zengin daha zengin olur (rich gets richer) olarak da anılır.
- Ölçekten bağımsız ağ öodelinin rassal ağ modelinden farkı, ağa her adımda yeni bir düğüm eklenmesidir.
- Ağa eklenen düğüm,i düğümünün derecesi olan k_i'ye bağımlı olarak i düğümü ile bağlantı kurar.

Ölçekten Bağımsızlık

- Bu modelde ağ oluşumu, zaman içerisinde ağa yeni düğümler eklenmesi şeklinde gerçekleşir.
- Bu Eklenen yeni düğümler, ağdaki derecesi yüksek olan düğümlere bağlanmak ister.
- Bu nedenle bu model zengin daha zengin olur (rich gets richer) olarak da anılır.
- Ölçekten bağımsız ağ öodelinin rassal ağ modelinden farkı, ağa her adımda yeni bir düğüm eklenmesidir.
- Ağa eklenen düğüm,i düğümünün derecesi olan k_i'ye bağımlı olarak i düğümü ile bağlantı kurar.

Ölçekten Bağımsızlık

- Bu modelde ağ oluşumu, zaman içerisinde ağa yeni düğümler eklenmesi şeklinde gerçekleşir.
- Bu Eklenen yeni düğümler, ağdaki derecesi yüksek olan düğümlere bağlanmak ister.
- Bu nedenle bu model zengin daha zengin olur (rich gets richer) olarak da anılır.
- Ölçekten bağımsız ağ öodelinin rassal ağ modelinden farkı, ağa her adımda yeni bir düğüm eklenmesidir.
- Ağa eklenen düğüm,i düğümünün derecesi olan k_i'ye bağımlı olarak i düğümü ile bağlantı kurar.

Ölçekten Bağımsızlık

Yeni bir düğümün k_i bağlantı sayısına sahip bir i düğümü ile bağlantı kurma olasılığı $p(k_i)$ şöyle hesaplanır:

Yeni Düğümün Bağlantı Kurma Olasılığı

$$\mathrm{P}\left(\mathrm{k_i}\right) = \frac{k_i}{\Sigma k_i}$$

Bu olasılığa göre, yeni bir düğümün 4 bağlantıya sahip bir düğüm ile bağlantı kurma olasılığı 2 bağlantıya sahip bir düğüm ile bağlantı kurma olasılığının 2 katıdır.

Kuvvet Yasası

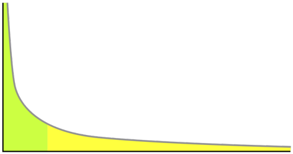


Figure: Derece Dağılımı

- Bir ağda düğümlerin bağlantı sayılarından oluşan olasılık dağılımına derece dağılımı adı verilir.
- Kuvvet yasası dağılımları sık sık kalın kuyruklu dağılımlar, Pareto dağılımları ve Zipf dağılımları adlarını alırlar. Ölçekten bağımsız bir ağda derece dağılımı kuvvet yasasına uyar.
- Bu yasaya uygun bir dağılımda, örneğin aylık geliri 1.000 TL olan insan sayısı 100 iken, aylık geliri 10.000 TL olan insan sayısı 10 ve aylık geliri 100.000 TL olan insan sayısı 1 ise, gelir dağılımı kuvvet yasasına uygun olarak dağılmaktadır.

Kuvvet Yasası

Matematiksel olarak α üs veya ölçekleme parametresi olduğunda eğer x değerinin dağılımı,

Kuvvet Yasası Dağılımı

$$P(x) = Cx^{-\alpha}, x \geq x_{\min}, \quad \alpha > 1$$

dağılımına uygunsa x, kuvvet yasasına göre dağılır. Genelde belirli bir $x_{\min}$ değerinden büyük olan x değerleri için kuvvet yasası geçerlidir.

İki Parçalı Ağlar

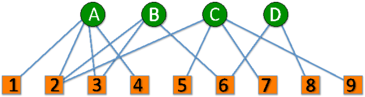


Figure: İki parçalı ağ

- İki parçalı ağ, bir ağı oluşturan dügümlerin iki farklı küme içerisinde gösterilmesiyle oluşur.
- Bu ağ gösteriminde düğümlerin kendi kümesi içindeki düğümler ile bağlantısı yokken karşı kümedeki düğümler ile bağlantısı vardır.
- *m* ilk kümenin ve *n* de ikinci kümenin eleman sayısını gösterecek olursa bu iki parçalı ağ, $G_{\mathrm{m,n}}$ ile temsil edilir.
- Buna göre yukarıdaki örnek ağ, $G_{4,9}$ ile temsil edilir.

İki Parçalı Ağlar

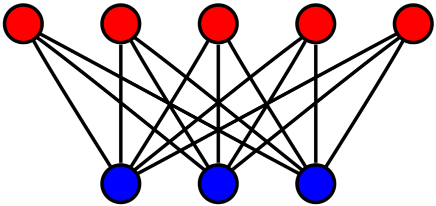


Figure: İki parçalı Tam ağ

- İki parçalı ağı oluşturan iki kümeden herhangi birinin her bir düğümü, diğer kümenin her bir düğümü ile bağlı ise bu ağa iki parçalı tam ağ (complete bipartite network) denir.
- *m* ilk kümenin ve *n* de ikinci kümenin eleman sayısını gösterecek olursa bu iki parçalı tam ağ, $K_{\mathrm{m,n}}$ ile temsil edilir.
- Buna göre yukarıdaki örnek ağ, $K_{5,3}$ ile temsil edilir.

Sınıflayıcı ve Sınıflayıcı Olmayan Ağlar

- Eğer bir ağda düğümler derecelerine bakmaksızın başka düğümlerle rassal bağlantılar kuruyorsa bu ağlar *nötral ağlardır*.
- Bu Bunun tersine eğer merkezî düğümler merkezî düğümlere ekleniyorsa, bu ağlar *sınıflandırıcı (assortative)*; bunun tersine çok bağlantısı olan düğümler zayıf bağlantısı olan düğümlerle bağlantı kuruyorlarsa, o zaman da bu ağlar *sınıflandırıcı olmayan (dissassortive) ağlardır*.

Sınıflayıcı ve Sınıflayıcı Olmayan Ağlar

- Ünlülerin ünlülerle evlenmesi sınıflandırıcı ağlara, eski Türk filmlerinde zengin kızın, fakir erkekle veya zengin erkeğin fakir kızla evlenmesi ise sınıflandırıcı olmayan ağlara örnek olarak verilebilir.
- Sosyal ağlar sınıflandırıcı, teknolojik ve biyolojik ağlar ise sınıflandırıcı olmayan ağlardır.

Sınıflayıcı ve Sınıflayıcı Olmayan Ağlar

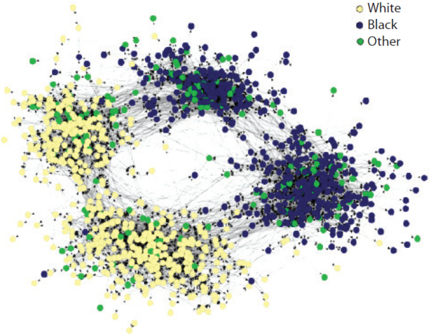


Figure: Sınıflandırıcı Ağ Örneği

- İki ayrı sınıfta beyazların beyazlarla, siyahların siyahlarla bağlantı kurmaları sınıflandırıcı (assortative) ağa örnektir.

Dirençli ve Dirençsiz Ağlar

- Saldırılarla karşılaştığında bile iyi performans gösteren bir ağ *dirençli bir ağdır*.
- Kabaca rassal ağlar dirençli ağlardır çünkü bu ağlarda bütün düğümler belirli bir olasılıkla başka düğümlere bağlanırlar.
- Buna karşılık, merkezî düğümlerin olduğu ağlar, bu düğümlerin hedef alınması koşuluyla *dirençsiz ağlardır*.
- Örneğin ölçekten bağımsız ağlar dirençsiz ağlardır.

Giriş

- Ağlarda, bazı düğümler arasında belli özelliklerin sağlanmasıyla topluluklar oluşmaktadır.
- Topluluğun tanımı, "kendi içindeki bağlantı sayısı maksimum bağlantı sayısının yarısından az olmayan ancak kendi dışı ile bağlantı sayısı 3'ü aşmayan gruplar topluluk adını alır" şeklinde yapılabilir.

Ağların İstatiksel Özellikleri

Sosyal ağların istatistiksel özellikleri şu şekildedir:

- Kalın kuyruklu derece dağılımları söz konusudur. Birkaç düğümün bağlantı sayısı çok fazla, çok sayıda düğümün ise bağlantı sayısı azdır.
- Ağlarda düğümler kümeler (topluluk-cluster) oluştururlar ve ağların yarıçapları küçüktür. Ağdaki bir düğümden diğerine birkaç sıçrama ile ulaşabilirsiniz. Genelde ağlarda kuvvet yasaları dağılımları (Power Law) geçerlidir.
- Ağlarda zaman içinde yarıçap küçülür ve yoğunluk artar. Dev bileşenin dışında küçük bileşenlerin büyüklükleri sabittir.

Sosyal ağların yukarıda belirtilen istatistiksel özelliklerini incelediğimizde, ağlarda düğümlerin kümeler oluşturduklarını görürüz.

Toplulukların Belirlenmesi

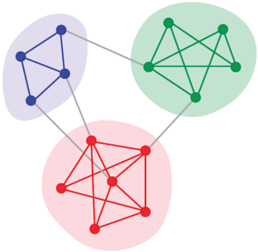


Figure: Topluluklara Ayrılmış Ağ

- Ağlardaki bu küçük kümeler birleşerek daha sonra dev bir bileşen oluştururlar.
- Bir topluluk, kendi üyeleri arasındaki bağlantıları ağın geri kalanına göre daha fazla olan düğümler olarak tanımlanabilir.
- Gruplar içi bağlantılar, gruplar arası bağlantılardan daha fazla ise bu gruplar topluluk adını alırlar.

Düğüm Benzerliği

- İki düğümün ne zaman benzer olduğu veya hangi düğümlerin bir düğüme benzediği sorusu ağların analizi açısından yararlı bir sorudur.
- Bu tür benzerlik "yapısal benzerlik" olarak adlandırılır. İki düğüm, ağda komşularının çoğunu paylaşmaları durumunda yapısal olarak eş değer kabul edilirler.
- Yapısal benzerliğin bulunmasında Öklidyen uzaklık kullanılır.

Öklidyen Uzaklık

$$\mathrm{d} = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

Düğüm Benzerliği

5 düğümden oluşan A ve B gibi iki topluluk ve bunların bağlantı sayılarını alarak bu iki topluluk arasındaki benzerliği Öklidyen uzaklık ile hesaplayalım:

$A = (3, 4, 6, 7, 9)$ $B = (3, 4, 6, 7, 9)$

$d = \sqrt{(3-3)^2 + (4-4)^2 + (6-6)^2 + (7-7)^2 + (9-9)^2} = 0$

Elde ettiğimiz $\mathrm{d} = 0$ sonucu bize A ve B toplulukları arasında uzaklığın sıfır olduğunu ve benzerliğin maksimum olduğunu gösterir.

Hiyerarşik Kümelenme

- Hiyerarşik kümelenme algoritması bir dizi nesneyi benzerliklerine göre bir soy *ağacında (dendogram)* düzenler.
- Benzerlik ise bu nesneler arasındaki bir uzaklık fonksiyonu ile bulunur. Birbirlerine benzer veya yakın olan nesneler aynı kümelerde toplanır.
- Sosyal ağlarda topluluk bulmada yaygın olarak kullanılan eski bir yöntem "hiyerarşik kümeleme" yöntemidir.
- Bu yöntem tek bir teknik olmaktan çok bir teknikler kümesi olarak düşünülebilir. Bu tekniklerin temel ilkesi, bir ağdaki düğümlerin ne kadar kuvvetli bağlarla bağlantılı olduklarına ilişkin bir ölçünün geliştirilmesine dayanır.

Bağlantı Yöntemleri

- Hiyerarşik kümelenmede başlangıçta her düğüm tek bir kümeyi oluşturur.
- Daha sonra kümeler birleştirilerek yeni kümelere ulaşılır.
- Uygulamada seçtiğimiz bağlantı yöntemi, iki küme arasındaki uzaklığın hangi tanımla ölçüleceğini belirler.

Tekli Bağlantı Yöntemi (Single Linkage Method)

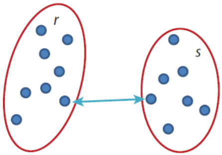


Figure: Tekli Bağlantı Yöntemi

- En yakın komşu yöntemi (nearest neighbor method) adını da alan tekli bağlantı yönteminde, iki küme arasındaki uzaklık bir kümedeki bir gözlem ile diğer kümedeki bir gözlem arasındaki minimum uzaklıktır.
- Tekli bağlantı yöntemi, kümeler birbirinden açık bir şekilde ayrıldığında iyi bir tercihtir.

Ortalama Bağlantı Yöntemi (Average Linkage Method)

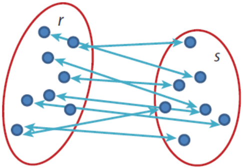


Figure: Ortalama Bağlantı Yöntemi

- Ortalama bağlantı yönteminde ise gözlem çiftleri arasındaki uzaklıkların ortalaması, iki küme arasındaki uzaklık olarak tanımlanır.

Derece Merkezîliği

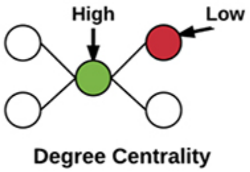


Figure: Derece Merkezîliği

- **Tanım:** Derece merkeziliği, her bir düğümün sahip olduğu bağlantı sayısına dayanan bir sayı belirler.
- **Bize ne söyler:** Her bir düğümün ağın içinde kaç tane doğrudan, "tek sıçramalık" bağlantısı olduğunu bu ölçü bize anlatır
- **Ne zaman kullanılır:** Popüler, çok bağlantıya ve bilginin çoğuna sahip olan ve ağın içinde hızla bağlantı kuran bireyleri bulmak için bu ölçü kullanılır.

Derece Merkezîliği

Ayrıca, düğümlerin bağlantısallığını inceleme açısından derece merkeziliği en basit ölçüdür. Bazen bu ölçü, gelen ve giden bağlantıların derece merkeziliği olarak ayrı ayrı hesaplanır, bazen de gelen ve giden bağlantıların toplamı temel olarak alınarak hesaplanır.

Arasındalık Merkezîliği

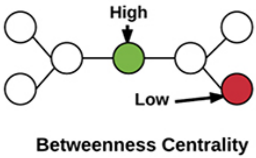


Figure: Arasındalık Merkezîliği

- **Tanım:** Diğer düğümlerin arasındaki en kısa patikalarda bir düğümün kaç kez yer aldığını arasındalık merkeziliği ölçer.
- **Bize ne söyler:** Bu ölçü, ağda hangi düğümlerin "köprü" olarak görev yaptığını gösterir. Bu ölçü önce bütün en kısa patikalar belirlenip her bir düğümün bu patikalarda kaç kez yer aldığı sayılarak elde edilir.
- **Ne zaman kullanılır:** Bir sistemdeki akışı etkileyen bireyleri belirlemek için bu ölçü kullanılır.

Arasındalık Merkezîliği

Ayrıca arasındalık ölçüsü iletişim dinamiklerini analiz etmede yararlıdır. Yüksek bir arasındalık ölçüsüne sahip olan bir birey, ağdaki farklı kümeler arasındaki iş birliğini kontrol eder ve bu ölçü bu bireyin otorite sahibi olduğunu gösterir.

Yakınlık Merkezîliği

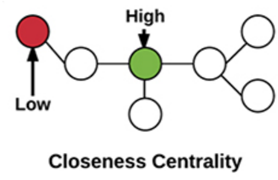


Figure: Yakınlık Merkezîliği

- **Tanım:** Bu ölçü, ağ içinde bir düğümün diğer düğümlere ne kadar yakın olduğunu ölçer.
- **Bize ne söyler:** Bu ölçü, bütün düğümler arasındaki en kısa patikaları hesaplar ve her bir düğüme sahip olduğu en kısa patika sayılarının toplamı olarak yakınlık merkeziliğini hesaplar.
- **Ne zaman kullanılır:** En hızlı şekilde ağın tümünü etkileyecek en iyi yerlere sahip bireyleri bulmak için bu ölçü kullanılır.

Yakınlık Merkezîliği

Ayrıca, yakınlık merkeziliği iyi “yayıncıları” bulmada yardımcıdır. Ama yüksek derecede bağlantısallığa sahip olan ağlarda bütün düğümlerin benzer yakınlık merkeziliğine sahip olduğu görülür. Daha yararlı olan bir yorum ise, tek bir kümedeki etkileyici bireylerin bu ölçü ile bulunmasıdır.

Özdeğer Merkezîliği

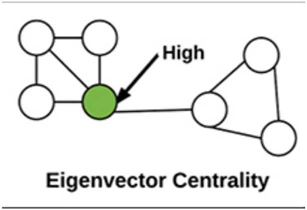


Figure: Özdeğer Merkezîliği

- **Tanım:** Derece merkeziliği gibi özdeğer merkeziliği de bir düğümün sahip olduğu bağlantılara dayanarak o düğümün etkisini ölçer. Ancak, özdeğer merkeziliği bir adım daha öteye giderek bir düğümün bağlantılı olduğu düğümlerin de kaç bağlantıya sahip olduklarıyla ilgilenir.
- **Bize ne söyler:** Bir düğüm ile doğrudan bağlantı içinde olmayan düğümlerin bağlantılarını da hesaba katan özdeğer merkeziliği, ağın tümünde etkili olan bireyleri belirler.
- **Ne zaman kullanılır:** Özdeğer merkeziliği iyi bir sosyal ağ analizi ölçüsüdür. Kötü propagandayı anlamak için bu ölçü kullanılabilir.

Sayfa Sırası Merkeziliği

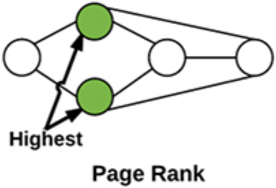


Figure: PageRank

- **Tanım:** Sayfa sırası merkeziliği, özdeğer merkeziliğinin bir türüdür ve bu ölçü, düğümlerin bağlantılarına ve onların bağlantılarının bağlantılarına dayanarak bir skor verir.
- **Bize ne söyler:** Bu ölçü düğümlerin ağın daha genelindeki etkilerini ortaya koyan ölçüdür.
- **Ne zaman kullanılır:** Bağlantının yönünü ve ağırlığını da hesaba kattığı için bu ölçü atıflar ve otoritenin anlaşılmasında kullanılır.

Teşekkürler!

Albert-László Barabási
Network Science
Cambridge University Press, 2016.

Charles Kadushin
Understanding Social Networks: Theories, Concepts, and Findings
Oxford University Press, 2011.

Necmi Gürsakal
Sosyal Ağ Analizi
Dora Yayıncılık, 2009.

Mark Newman
Networks
Oxford University Press, 2018.